

4. cvičení - teorie

3. 11. 2022

Definice 1. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že L je *vlastní limita posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (resp. } < K \text{)}.$$

Limity jsou jednoznačně určené.

Věta 2 (O vybrané posloupnosti). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel s limitou $A \in \mathbb{R}$. Buď posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom už $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$.

Věta 3 (Aritmetika limit). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a mějme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, máli pravá strana smysl.

Věta 4 (Dva strážníci / Sendvič). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \in \mathbb{R}^*$,

potom je $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

Věta 5 (mizející a omezená). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

potom je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Věta 6 (O posloupnosti s kladnými členy). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = A^m \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[m]{A}$.